

VII. Funkce

A) Základní vlastnosti funkcí

§1. Funkce

Def.: Funkcí f nazýváme každé zobrazení z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$, tedy $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $f \subseteq \mathbf{R}^2$ (tedy zobrazení v množině $\mathbf{R}$).

Pozn.: a) Je-li $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, pak pro každé $x \in \mathbf{R}$ existuje nejvýše jedno $y \in \mathbf{R} : y = f(x)$.

Číslo $y \in \mathbf{R}$ se nazývá funkční hodnotou funkce f v bodě x .

b) Takto je definována reálná funkce reálné proměnné – my to ztotožňujeme s pojmem „funkce“.

Def.: Necht' $f \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je funkce:

$D(f) = \{x \in \mathbf{R} : \exists! y \in \mathbf{R} : y = f(x)\}$... definiční obor funkce f

$H(f) = \{y \in \mathbf{R} : \exists x \in \mathbf{R} : y = f(x)\}$... obor hodnot funkce f

Pozn.: Způsoby zadání funkce: 1) výčtem prvků

2) tabulkou

3) předpisem (tzn. udáme pravidlo, pomocí něhož lze jednoznačně ke každému $x \in \mathbf{R}$ přiřadit nejvýše jedno $y \in \mathbf{R} : y = f(x)$).

Proměnnou x nazýváme nezávisle proměnnou a proměnnou y nazýváme závisle proměnnou.

Def.: Necht' v E_2 jsou dány 2 navzájem kolmé osy x, y s jednotkovou délkou. Pak grafem funkce f rozumíme množinu všech bodů $X[x; f(x)]$, kde x náleží definičnímu oboru.

Def.: Necht' f, g jsou funkce se společným definičním oborem D .

Funkci k_1 nazveme součtem funkcí f, g (zapisujeme $k_1 = f + g$), jestliže

$\forall x \in D: k_1(x) = f(x) + g(x)$

Funkci k_2 nazveme součinem funkcí f, g (zapisujeme $k_2 = f \cdot g$), jestliže

$\forall x \in D: k_2(x) = f(x) \cdot g(x)$

§2. Základní vlastnosti funkcí

A. PARITA FUNKCÍ

Def.: Funkce f se nazývá sudá, resp. lichá, jestliže platí:

1) $\forall x \in D(f) : (-x) \in D(f)$

2) $\forall x \in D(f) : f(-x) = f(x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$

Pozn.: a) Vlastnosti sudost a lichost funkce nazýváme pojmem parita.

b) Graf sudé funkce je osově souměrný podle osy y .

Graf liché funkce je středově souměrný podle počátku.

Pozn.: Je-li f lichá funkce taková, že $0 \in D(f)$, pak platí $f(0) = 0$.

V.2.1.: Necht' f, g jsou funkce se společným definičním oborem D . Necht' $h = f \cdot g$. Pak platí:

- 1) $(f - \text{sudá} \wedge g - \text{sudá}) \vee (f - \text{lichá} \wedge g - \text{lichá}) \Rightarrow h - \text{sudá}$
 - 2) $(f - \text{lichá} \wedge g - \text{sudá}) \vee (f - \text{sudá} \wedge g - \text{lichá}) \Rightarrow h - \text{lichá}$
- [Dk.:]

B. MONOTÓNNOST FUNKCE

Def.: Funkce f se nazývá prostá, právě když platí: $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Def.: Necht' f je funkce a M alespoň 2-prvková množina, $M \subseteq D(f)$.

Řekneme, že funkce f je v množině M :

- a) rostoucí : právě když $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- b) klesající : právě když $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- c) neklesající : právě když $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- d) nerostoucí : právě když $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Pozn.: a) Je-li $M = D(f)$, hovoříme stručně o rostoucí, resp. klesající, neklesající, nerostoucí funkci.

- b) Neklesající a nerostoucí funkce nazýváme souhrnně monotónními funkcemi.
Rostoucí a klesající funkce nazýváme souhrnně ryze monotónními funkcemi.

V.2.2.: Necht' f je funkce. Pak platí:

Je-li f ryze monotónní, pak je prostá.

[Dk.:]

Pozn.: Obrácení předchozí věty ?

V.2.3.: Necht' f je funkce, $M \subseteq D(f)$ je alespoň 2-prvková množina. Pak platí: Je-li f ryze monotónní v M , pak je funkce f ryze monotónní v každé alespoň 2-prvkové množině M_I , $M_I \subseteq M$.

C. OHRANIČENOST FUNKCE

Def.: Necht' f je funkce, $M \subseteq D(f)$. Řekneme, že funkce f je v množině M :

- a) shora omezená, právě když $\exists k \in \mathbf{R} : \forall x \in M : f(x) \leq k$
- b) zdola omezená, právě když $\exists k \in \mathbf{R} : \forall x \in M : f(x) \geq k$
- c) omezená, právě když je omezená zdola i shora současně.

Pozn.: a) Je-li $M = D(f)$, hovoříme stručně o shora omezené, resp. zdola omezené nebo omezené funkci.

- b) Definici omezené funkce lze vyslovit i takto:

funkce f je v M omezená $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{R}^+ : \forall x \in M : |f(x)| \leq k$.

- c) Je-li M konečná množina, je funkce f vždy omezená.

- d) Místo pojmu omezenost se také mluví o ohraničenosti funkce.

D. EXTRÉMY FUNKCE

Def.: Necht' f je funkce, $M \subseteq D(f)$, v ní 2 prvky $a, b \in M$.

Řekneme, že funkce f má v bodě a :

a) ostré maximum na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M; x \neq a: f(x) < f(a)$

b) maximum (neostré) na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M: f(x) \leq f(a)$

Řekneme, že funkce f má v bodě b :

c) ostré minimum na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M; x \neq b: f(x) > f(b)$

d) minimum (neostré) na množině M právě tehdy, když $\forall x \in M: f(x) \geq f(b)$

Pozn.: a) Je-li $M = D(f)$, řekneme, že funkce f má v bodě a ostré maximum resp. maximum nebo že funkce f má v bodě b ostré minimum resp. minimum.

b) Maxima a minima funkce nazýváme extrémy funkce.

E. PERIODICITA FUNKCE

Def.: Necht' f je funkce. Funkce f se nazývá periodická, právě když $\exists p \in \mathbf{R}^+: \forall x \in D(f)$:

1) $x \in D(f) \Rightarrow x \pm p \in D(f)$

2) $f(x) = f(x \pm p)$

Číslo p se nazývá periodou této funkce.

V opačném případě se funkce nazývá neperiodická.

Pozn.: a) Matematickou indukcí se dokáže, že definici periodické funkce lze říci i takto:

Funkce f je periodická s periodou $p \Leftrightarrow \exists p \in \mathbf{R}^+: \forall k \in \mathbf{Z}: \forall x \in D(f)$:

1) $x \in D(f) \Rightarrow x \pm kp \in D(f)$

2) $f(x) = f(x \pm kp)$

b) Funkce f není periodická $\Leftrightarrow \forall p \in \mathbf{R}^+: \exists x \in D(f)$ tak, že:

$x \in D(f) \wedge x \pm p \notin D(f)$ nebo $f(x) \neq f(x \pm p)$

c) Má-li periodická funkce f periodu p , pak kladné číslo kp , kde $k \in \mathbf{N}$, je též periodou funkce f .

Def.: Necht' f je periodická funkce, pak periodu p_0 , s vlastností, že pro každou jinou periodu p platí: $p > p_0$, nazýváme nejmenší periodou funkce f (pokud existuje).

Pozn.: Dirichletova funkce $H(x) = 1$ pro $\forall x \in \mathbf{Q}$
 0 pro $\forall x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$
graf

Pozn.: Necht' $x \in \mathbf{R}$ je libovolné číslo. Pak existuje právě jedna dvojice $z \in \mathbf{Z}, a \in \langle 0;1 \rangle$ tak, že $x = z + a$.

Číslo z nazýváme celou částí čísla x a zapisujeme $[x] = z$.

graf